

1/4/19

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μονότονη τότε αυτή είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$

Απόδ

Συνθήκη Riemann : Μια φραγμένη συνάρτηση $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο I αν $\forall \epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του I τέτοια ώστε $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) \quad (a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b)$$

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

Εφόσον f είναι μονότονη είναι ή αύξουσα ή φθίνουσα στο $[a, b]$. Υποθ. ότι f είναι αύξουσα στο $[a, b]$ τότε εφόσον $a < b$ έχουμε $f(a) \leq f(b)$.

Εάν $f(a) = f(b)$ $\forall a < x < b$ θα έχουμε $f(x) = f(a) = f(b)$

δηλ. η f είναι σταθερή στο $[a, b]$ άρα είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

(25)

• Εάν $f(a) < f(b)$ τότε $\forall x \in [a, b]$ έχουμε
 $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ δηλ f είναι φραγμένη στο $[a, b]$
 Έστω $\varepsilon > 0$ και θεωρούμε μια διαμερίση του P του $[a, b]$, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ με $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ με
 λεπτότητα (μήκος μεγαλύτερου υποδιαστήματος)

$$\|P\| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \quad \text{τοτε εφόσον η } f \text{ είναι αύξουσα}$$

$$M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_k)$$

$$m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_{k-1})$$

$$\text{οπότε} \quad U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) (x_k - x_{k-1}) \leq \|P\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1}))$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

δηλ f ομοιότ. στο $[a, b]$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ και f μονότονη, τότε σε εσωτερικό σημείο x του A η f έχει πεπερασμένα πλευρικά όρια

Απόδ.

Έστω y ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία (x_n) με $\lim x_n = y$. Έστω ότι η f είναι αύξουσα και εφόσον και (x_n) είναι αύξουσα ακολουθία $(f(x_n))$ είναι επίσης μια αύξουσα ακολουθία. Επιπλέον (x_n) αύξουσα και $x_n \rightarrow y$ έπεται ότι $x_n < y \ \forall n \in \mathbb{N}$ $x_1 < x_2 < \dots < x_n < y$ συνεπώς $f(x_n) \leq f(y) \ \forall n \in \mathbb{N}$. Δηλ. $(f(x_n))$ είναι αύξουσα και ανω φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ οπότε αυτή είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$ δηλ.

$\lim (x_n) = L = \sup \{ f(x_n) : n \in \mathbb{N} \}$ και εφόσον $f(x_n) \leq f(y) \ \forall n$ έπεται ότι $L \leq f(y)$. Έστω x τέτοιο ώστε $x_n < x < x_{n_1} < y$

Εφόσον $x_n \rightarrow y$ θα υπάρχει x_{n_1} τ.ω $x_n < x < x_{n_1} < y$

($n > n_0 : |x_n - y| < \varepsilon \ \forall n > n_0$) τότε

$$f(x_n) \leq f(x) \leq f(x_{n_1}) \leq \sup \{ f(x_k) : k \in \mathbb{N} \} = L$$

Εφόσον $\lim_n f(x_n) = L$ έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow y^-} f(x) = L$

Ομοία εάν $\{y_n\}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία με $\lim y_n = y$ τότε $y < y_n < y_{n-1} < \dots < y_1$

δηλ. $y \leq y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ και εφόσον η f είναι αύξουσα $f(y_n) \leq f(y_{n-1}) \ \forall n \in \mathbb{N}$. Δηλ. $(f(y_n))$ φθίνουσα ακολουθία και επίσης εφόσον $y \leq y_n \ \forall n$ $f(y) \leq f(y_n)$. Άρα $(f(y_n))$ είναι φθίνουσα και κατω φραγμένη ακολουθ. στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι συγκλίνουσα δηλ. $\lim f(y_n) = l = \inf \{ f(y_n) : n \in \mathbb{N} \}$ και $f(y) \leq l = \inf \{ f(y_n) : n \in \mathbb{N} \}$ τώρα αν x τ.ω. $y < x < y_n$

$\log w$ ~~ou~~ $y_n \rightarrow y \quad \exists y_m \tau. w \quad y < y_m < x < y_n \Rightarrow$
 $\xrightarrow{f \text{ αυξ.}} f(y) \leq f(y_m) < f(x) < f(y_n)$ και εφόσον
 $f(y) \leq l \leq f(y_m) < f(x) < f(y_n)$ και $\lim_n f(y_n) = l$
 $\lim_{x \rightarrow y^+} f(x) = l$

ΑΣΚΗΣΗ

Να δείξετε ότι το κατω σημείο οριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας μονότονων συναρτήσεων είναι μονότον συνάρτηση

Ανάλ.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f_n \xrightarrow{p.o.} f$ στο A . Εάν κάθε f_n είναι
 αύξουσα τότε εάν $x, y \in A$ με $x < y$ τότε $f_n(x) \leq f_n(y)$
 $\forall n \in \mathbb{N}$ (όποτε εφόσον από υποθ. $f_n \xrightarrow{p.o.} f$) έχουμε
 $f(x) = \lim_n f_n(x) \leq \lim_n f_n(y) = f(y)$ δηλ. $f(x) \leq f(y)$

Όμοια εάν κάθε μια από τις f_n είναι φθίνουσα.

• Εάν μια από τις f_n είναι φθίνουσα και οι υπο-
 λογικές αύξουσες το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει
 μιας και η οριακή εξαρτάται από το ανεπρ. πλήθος
 των f_n . Έτσι με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πούμε
 ότι εάν πεπερασμένο πλήθος αύξουσες τότε η
 οριακή εξαρτάται από το ανεπρ. πλήθος από τις
 f_n και θα έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με το
 ανεπρ. πλήθος των f_n που είναι αύξουσες.

• Εάν ανεπρ. πλήθος από τις f_n είναι αύξουσες
 και ανεπρ. πλήθος από αυτές είναι φθίνουσες τότε
 θεωρώ υπακολουθία της ~~(f_n)~~ f_n ενν. (f_{k_n}) των
 όρων που είναι αύξουσες συναρτήσεις και επίσης
 υπακολουθία (f_{l_n}) ενν. (f_n) που αποτελείται από

$\delta \rho \upsilon \varsigma$ της (f_n) που είναι φθίνουσες συναρτήσεις. Εφόσον
 $f_n \xrightarrow{p.o} f$ στο A έχουμε ότι $f_{k_n}(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in A$ (1)
 και $f_{l_n}(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in A$ (2), από την (1) έχουμε
 ότι εφόσον (f_{k_n}) ακολουθεί αύξουσες συναρτήσεις
 οπότε εάν $x, y \in A$ με $x < y$: $f_{k_n}(x) \leq f_{k_n}(y)$ $\forall n \in \mathbb{N}$
 άρα παίρνοντας όρια: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(y) = f(y)$
 δηλ. $f(x) \leq f(y)$ (3) ομοίως εφόσον (f_{l_n}) ακολουθ. φθίνουσες
 συναρτήσεις $f_{l_n}(x) \geq f_{l_n}(y)$ $\forall n$ άρα $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{l_n}(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f_{l_n}(y) = f(y)$
 Άπο (3) και (4) έχουμε $f(x) = f(y)$ δηλ. f σταθερή (4)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι έχει άλμα στο σημείο x
 του πεδίου ορισμού της αν η f έχει πλευρικά όρια στο x
 αλλά δεν είναι συνεπής στο x .

- Σύμφωνα με προηγούμενη πρόταση εάν η f είναι
 μονότονη τα πλευρικά όρια υπάρχουν. Συνεπώς
 μια μονότονη συνάρτηση εάν δεν είναι συνεχής
 το μοναδικό είδος ασυνέχειας που μπορεί να έχει
 είναι άλμα.

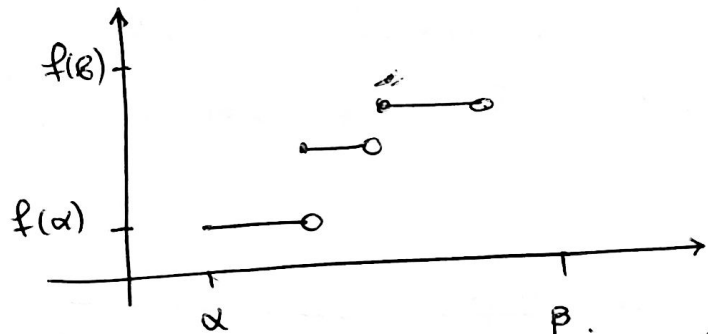
ΘΕΩΡΗΜΑ

Μια μονότονη συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει σε
 πολύ αριθμησιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας.

Απόδ.

Έστω ότι η $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αύξουσα συνάρτηση.
 Σύμφωνα με προηγ. πρόταση $\forall x \in (a, b)$ τα πλευρικά
 όρια $\lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$ και $\lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$ υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$). Έστω
 $f(x^-) = \lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$ και $f(x^+) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$. Εάν $\omega(x) = f(x^+) - f(x^-)$
 άλμα της f στο σημείο x .

Τότε η f είναι συνεχής στο x εάν $\omega(x)$ είναι
 θετικό. Για $n \in \mathbb{N}$ ορίσουμε το σύνολο $S_n = \{x: \omega(x) \geq \frac{1}{n}\}$
 Εάν $p_1, p_2, \dots, p_k$ είναι k διαφορετικά στοιχεία του
 S_n τότε εφόσον $a \leq p_i \leq b$ το άθροισμα των
 αλμάτων σε αυτά τα σημεία θα είναι το πολύ
 ίσο με $f(b) - f(a)$
 άρα $\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{k \text{ - μέλη}} \leq f(b) - f(a)$

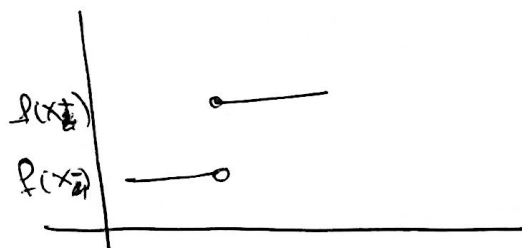


$$\Rightarrow \frac{k}{n} \leq f(b) - f(a) \Rightarrow$$

$$k \leq n(f(b) - f(a))$$

Άρα για $n \in \mathbb{N}$ το S_n
 περιέχει πεπερασμένο πλήθος σημείων k . Άρα το
 σύνολο $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο ως αριθμή-
 σιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων.

Β' τρόπος



Εφόσον τα διαστήματα από το
 $f(x_-)$ έως $f(x_+)$. Εάν δεν είναι
 κενά σημαίνουν ένα σύνολο από
 ξένα διαστήματα του $\mathbb{R}$ ανοικτά
 $(f(x_-), f(x_+))$, (ξένα διότι αν π.χ

$y \in (f(x_-), f(x_+))$ και $y \in (f(x_-), f(x_+))$ και f π.χ
 αύξουσα τότε $f(x_-) < y < f(x_+) < f(x_-) < y < f(x_+)$
 και άρα $y < y$ άπορο) αλλά υπάρχουν αριθμήσιμα
 το πλήθος ξένα ανοικτά διαστήματα του $\mathbb{R}$ διότι
 σε κάθε ένα από αυτά υπάρχει ένας ρητός αριθ-
 μός που δεν ανήκει κανένα άλλο τέτοιο διά-
 στημα, άρα υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία από την
 οικογένεια αυτή των ξένων ανοικτών διαστημάτων
 με ένα υποσύνολο των ρητών αριθμών συνεπώς
 το σύνολο αυτών των διαστημάτων είναι το πολύ
 αριθμήσιμο

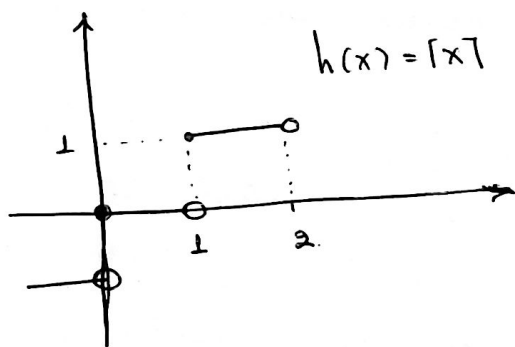
ΠΡΟΤΑΣΗ (*)

Τα ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}$, εάν δεν είναι κενά αποτελούνται από αριθμήσιμα το πλήθος ξερά ανοικτά διαστήματα του $\mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΗ

Να εξετάσετε ως προς την ημισυνεχεία τη συνάρτηση $f(x) = \sin(x - [x])$, $x \in \mathbb{R}$

Αν.



Εστω $g(x) = x - [x]$. Εφόσον για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ η $[x]$ είναι συνεχής επειδή όλα για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ είναι συνεχής. Οπότε και η

$f(x) = \sin(x - [x])$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ από στα σημεία αυτά είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

Εάν $y \in \mathbb{Z}$ τότε $g(y) = y - [y] = y - y = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow y^-} g(x) = y - (y-1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow y^+} g(x) = y - y = 0$$

Για κάθε x ισχύει $0 \leq x - [x] \leq 1$ και $f(x) = \sin x$ είναι συνεχής και αύξουσα στο $[0, 1] \subseteq (0, \frac{\pi}{2})$ οπότε

$$\forall y \in \mathbb{Z} : \liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \lim_{x \rightarrow y^-} f(x) = \sin 0 = 0$$

$$\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = \lim_{x \rightarrow y^+} f(x) = \sin 1 > 0 = f(y) \text{ δεν είναι άνω ημισυνεχής στο } y \in \mathbb{Z}$$

$$\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \lim_{x \rightarrow y^+} f(x) = \sin 0 = 0 > 0 = f(y) \text{ άρα } f \text{ κάτω ημισυνεχής στο } y \in \mathbb{Z}$$

• Έστω G ένα φραγμένο και ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}$.
 Δοθέντος ενός σημείου $x \in G$ θέλουμε να δείξουμε
 ότι υπάρχει ένα μέγιστο ανοικτό διάστημα το οποίο
 είναι υποσύνολο του G και περιέχει το σημείο x .
 Έστω λοιπόν $x \in G$, G ανοικτό, άρα υπάρχει κάποιο
 διάστημα ~~(x, θ)~~ $(x, \theta) \subset G$ και $x \in (a, b)$. Έστω
 B το ελάχιστο άνω φράγμα των αριθμών b τέ-
 τοιων ώστε $(x, b) \subset G$ (το B είναι πεπερασμένο δια-
 υποθέσαμε ότι G φραγμένο). Ομοίως Έστω A το
 μεγαλύτερο κάτω φράγμα των αριθμών a τέτοιων
 ώστε το διάστημα $(a, x) \subset G$ (λόγω του ότι G φραγ-
 μενο A είναι πεπερασμένο).

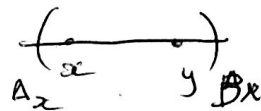
Το B δεν μπορεί να είναι στοιχείο του G , διότι
 αν ήταν στοιχείο του G λόγω του ότι G είναι
 ανοικτό σύνολο θα υπήρχε εστο τέτοιο ώστε
 $(B - \varepsilon, B + \varepsilon) \subset G$ (το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τον
 ορισμό του B (δεν θα ήταν άνω φράγμα)). Ομοίως
 και το A δεν μπορεί να είναι στοιχείο του G
 (διότι αν ήταν $\exists$ εστο τέτοιο $(A - \varepsilon, A + \varepsilon) \subset G$ και άρα
 A δεν θα ήταν κάτω φράγμα).
 Άρα $(A, B) \subset G$, $x \in (A, B)$ και δεν μπορεί να με-
 γεθυνθεί χωρίς να συμπεριληφθούν στοιχεία έξω από
 το G .

(*) ΠΡΟΤΑΣΗ II

Εάν $x \in G$ είδαμε ότι υπάρχει μέγιστο ανοικτό διάστημα (Ax, Bx) που περιέχει το x και $(Ax, Bx) \subseteq G$ οπότε

$$G = \bigcup_{x \in G} (Ax, Bx)$$

(1) Αν $x, y \in G$ και $y \in (Ax, Bx)$ τότε



αποδεικνύεται ότι $(Ax, Bx) = (Ay, By)$

Διότι εφόσον $y \in (Ax, Bx)$ έπεται ότι $(y, Bx) \subseteq G$ άρα $Bx \leq By$ (διότι ορίσαμε το By ως (μικρότερο) άνω φράγμα των by τέτοιων ώστε $(y, by) \subseteq G$).

Όμοια $Ay \leq Ax$ (διότι Ay ορίσαμε να είναι το (μεγαλύτερο) κάτω φράγμα των ay τέτοιων ώστε $(ay, y) \subseteq G$). Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $(Ax, Bx) \subseteq (Ay, By)$ (*) . Επίσης εφόσον $x \in (Ay, By)$ (*) $\leq (Ay, By) \Rightarrow x \in (Ay, By)$ οπότε $By \leq Bx$ (διότι Bx άνω φράγμα των bx τ.ω $(x, bx) \subseteq G$)

Όμοια $Ax \leq Ay$ (διότι Ax κάτω φράγμα των ax τέτοιων ώστε $(ax, x) \subseteq G$). Άπο τις (3), (4) έχουμε:

$(Ay, By) \subseteq (Ax, Bx)$ (**) . Άπο (*) (**) έχουμε $(Ax, Bx) = (Ay, By)$

(2) Εάν $x, y \in G$ τότε ισχύει ή $(Ax, Bx) \cap (Ay, By) = \emptyset$ ή $(Ax, Bx) = (Ay, By)$. Πράγματι εάν $z \in (Ax, Bx) \cap (Ay, By)$ οπότε σύμφωνα με τα προηγούμενα: $(Ax, Bx) = (Az, Bz) = (Ay, By)$. Άρα $(Ax, Bx) = (Ay, By)$. Επομένως δημιουργούμε με αυτό τον τρόπο ένα ανοικτά διαστήματα μέγιστου μήκους και το G γράφεται ως ένωση αυτών αν διαστημάτων

Ανταδράση : $G = \bigcup_{i \in I} I_i$

οπου I_i μέγιστα ανοικτά διαστήματα τα οποία είναι αριθμησιμα το πλήθος (δίδει αν θεωρήσω $f: I \rightarrow \mathcal{Q}$
 $i \in I \rightarrow q_i \in I_i$ (q_i ρητός) κάθε $q_i \in I_i$ δεν ανήκει σε κανένα άλλο διάστημα I_j , $j \neq i$ οπως θεθήκαμε 1-1 αντιστοιχία με υποσύνολο του $\mathcal{Q}$.

↳ Τα παραπάνω δείχθηκαν για G -φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$

• Εάν G δεν είναι φραγμένο τότε

- Εάν $G = \mathbb{R}$ και τότε G είναι ένα ανοικτό διάστημα
- Εάν $G \neq \mathbb{R}$ τότε υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ και $a \notin G$

Συνεπώς  με αυτό τον τρόπο δημιουργούνται

δύο τμήματα του G . Ένα τμήμα του G που βρίσκεται κάτω από το a και ένα που βρίσκεται πάνω από το a (δηλ. ένα άνω φραγμένο και ένα κάτω φραγμένο)

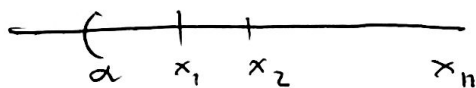
Συνεπώς αν δείξω ότι μπορώ να γράψω κάθε άνω φραγμένο και κάθε κάτω φραγμένο με ανοικτά ξένα διαστήματα αριθμησιμα το πλήθος τότε μπορώ να έχω το ζητούμενο (δίδει η αριθμησιμη έκταση δύο αριθμησιμων συνόλων είναι αριθμησιμο σύνολο)

Υποθέτω ότι το G είναι κάτω φραγμένο και έχω a το μεγαλύτερο κάτω φράγμα (το $a \notin G$ διότι εφόσον G είναι ανοικτό θα επρέπε $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq G$ και τότε το a δεν είναι κάτω φράγμα για το G). Τώρα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(A) Εάν το συμπλήρωμα του G ($\mathbb{R} \setminus G$) έχει πεπερασμένο supremum ως το πούμε $p \in \mathbb{R}$
 Το $b \notin G$ (δίοι G ανοικτό) άρα θα υπήρχε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subseteq G$.

Οπόσε το σύνολο G αποτελείται απο το $(b, +\infty)$ και απο ένωση απο αριθμήσιμο ~~και~~ πλήθος ξερων ανοιχτών διαστημάτων που καλύπτουν το φραγμένο κομμάτι που βρίσκεται μεταξύ του a και του b

(B) Εάν τώρα το $\mathbb{R} \setminus G$ δεν έχει πεπερασμένο supremum τότε $\sup(\mathbb{R} \setminus G) = +\infty$, τότε μπορούμε να βρούμε μια αύξουσα ακολουθία σημείων του $\mathbb{R} \setminus G$ (x_n) με $\lim x_n = +\infty$



κομμάτια του G που βρίσκεται μεταξύ του (a, x_1) και (x_i, x_{i+1}) μπορούν να εκφραστούν ως αριθμήσιμη ένωση ξερων ανοιχτών διαστημάτων. Άρα και όλο το G (αριθμήσιμη ένωση αριθμησιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο)
 ➤ Με παρόμοιο τρόπο εφαρμόσαμε και αν G είναι άνω φραγμένο.